Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Lösungen 4

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/5, & 1 \leq x < 4 \\ 3/4, & 4 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x. \end{cases}$$

a) Skizziere die Verteilungsfunktion.

b) Berechne die zugehörige Gewichtsfunktion und skizziere diese.

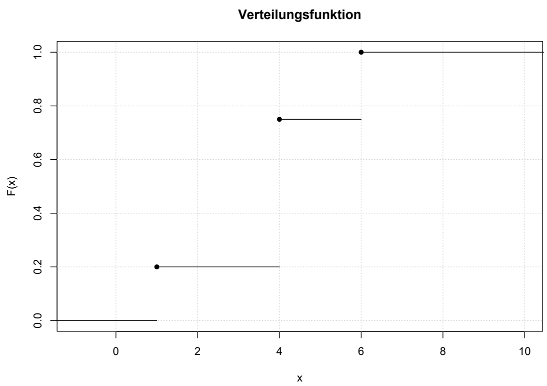
c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}\left(X = 6\right), \ \mathbb{P}\left(X = 5\right), \ \mathbb{P}\left(2 < X < 5.5\right), \ \mathbb{P}\left(0 \leq X < 4\right).$$

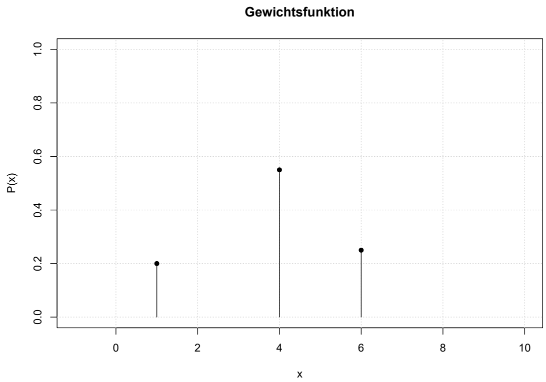
d) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}\left(X\right)$ und die Standardabweichung $\mathrm{sd}(X)$.

Lösung:

a) Skizze der Verteilungsfunktion:



b) $p_X(1) = 0.2$, $p_X(4) = 0.55$ und $p_X(6) = 0.25$. Skizze der Gewichtsfunktion:



c) $\mathbb{P}(X=6)=0.25$, $\mathbb{P}(X=5)=0$, $\mathbb{P}(2<X<5.5)=p_X(4)=0.55$ und $\mathbb{P}(0\leq X<4)=p_X(1)=0.2$.

d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0.2\cdot 1+0.55\cdot 4+0.25\cdot 6=3.9.\\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= 0.2\cdot 1+0.55\cdot 16+0.25\cdot 36=18.\\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2=18-15.21=2.79.\\
\mathrm{sd}(X) &= \sqrt{\mathbb{V}(X)}\approx 1.6703.
\end{aligned}$$

2. Der kleine Diego darf seine Eltern zu einer Party begleiten. Bei solchen Gelegenheiten möchte Diego jeweils so lange wie möglich wach bleiben. Sein Durchhaltevermögen (wach bleiben in Stunden ab Partybeginn um 20 Uhr) werde durch die Zufallsvariable T mit Verteilungsfunktion

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{falls } t\leq 0\\ 1-\exp(-t/3), & \text{falls } t>0\end{cases}$$

beschrieben.

a) Prüfe, ob es sich bei F wirklich um eine Verteilungsfunktion handelt.

b) Hat F eine Dichte? Wenn ja, wie lautet diese?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diego vor Mitternacht einschläft?

d) Um welche Uhrzeit beträgt die Wahrscheinlichkeit genau 50%, dass Diego bereits eingeschlafen ist (*bei der gesuchten Uhrzeit handelt es sich um den Median der Zufallsvariable T*)?

Lösung:

a) F ist monoton wachsend und (rechts-)stetig, weil exp monoton wachsend und (rechts-)stetig ist. Ausserdem gilt $\lim_{t\to-\infty}F(t)=0$ und $\lim_{t\to\infty}F(t)=1$. Also ist F in der Tat eine Verteilungsfunktion.

b) F ist eine stetige Verteilung deren Dichte f man durch Ableiten der Verteilungsfunktion erhält. Es gilt also:

$$f(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0, \\ \frac{1}{3}\exp(-t/3), & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

c) $P(T \leq 4) = F(4) = 1 - \exp(-4/3) \approx 0.736$.

d) Wir bestimmen t, so dass $P(T \leq t) = F(t) = 0.5$ gilt. Auflösen nach t liefert $t = -3\ln(0.5) \approx 2.08 \approx 2$ Stunden 5 Minuten. Die gesuchte Uhrzeit ist also ca. 22:05 Uhr.

3. In der Stadt Zürich gibt es bekanntlich viele Baustellen. Die Dauer X der Arbeiten bei einer Baustelle liege zwischen 0 und 20 Wochen. Die Dichte f der Zufallsvariable X habe die Form

$$f(x) = \begin{cases} c - \frac{c}{20}x, & \text{falls } x \in [0, 20], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Welchen Wert muss c annehmen und warum?

b) Berechne die kumulative Verteilungsfunktion und skizziere diese.

c) Bestimme mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit X

(i) maximal 5 Wochen beträgt,

(ii) zwischen 5 und 10 Wochen beträgt.

d) Berechne den Erwartungswert und den Median der Dauer X.

e) Welche Dauer wird nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% überschritten?

f) $K = 40'000 \cdot \sqrt{X}$ entspreche dem Betrag in Franken, den die Arbeiten bei einer Baustelle kosten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeiten bei einer Baustelle höchstens $120'000$ Franken kosten?

Lösung:

a) Damit f eine Dichte ist, muss die Fläche unter der Funktionskurve (das Integral der Funktion) gleich 1 sein. Wir berechnen das Integral

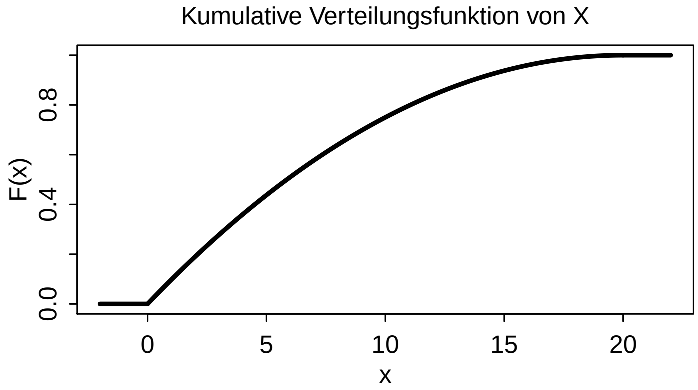
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{20} \left(c - \frac{c}{20}x\right) dx = 20c - \frac{c}{20}\frac{20^2}{2} = 10c.$$

Es muss also gelten $10c = 1$, das heisst $c = \frac{1}{10}$.

b) Die kumulative Verteilungsfunktion von X lässt sich durch Integration der Dichtefunktion berechnen: Für $0 \leq x \leq 20$ gilt

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{10} - \frac{t}{200}\right) dt = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{400}.$$

Skizze von F:



c) Für $x \leq 0$ ist $F(x) = 0$ und für $x \geq 20$ gilt $F(x) = 1$.
Insbesondere gilt: $P[X \leq 5] = F(5) = 0.4375$ und $P[5 \leq X \leq 10] = F(10) - F(5) = 0.3125$.

d)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{20} x \left[\frac{1}{10}\left(1 - \frac{x}{20}\right)\right] dx = \frac{1}{10}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{60}\right)\Bigg|_0^{20} = \frac{20}{3}$$

Für den Median m muss gelten: $F(m) = 0.5$. Der Median liegt sicher im Intervall [0,20] und somit haben wir

$$\frac{m}{10} - \frac{m^2}{400} = 0.5 \qquad \Longrightarrow \qquad m = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5.858.$$

e) Gesucht ist x, so dass $\mathbb{P}(X > x) = 0.1$. Es gilt:

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x) = 0.1.$$

Ähnlich wie in Teilaufgabe d) ergibt sich:

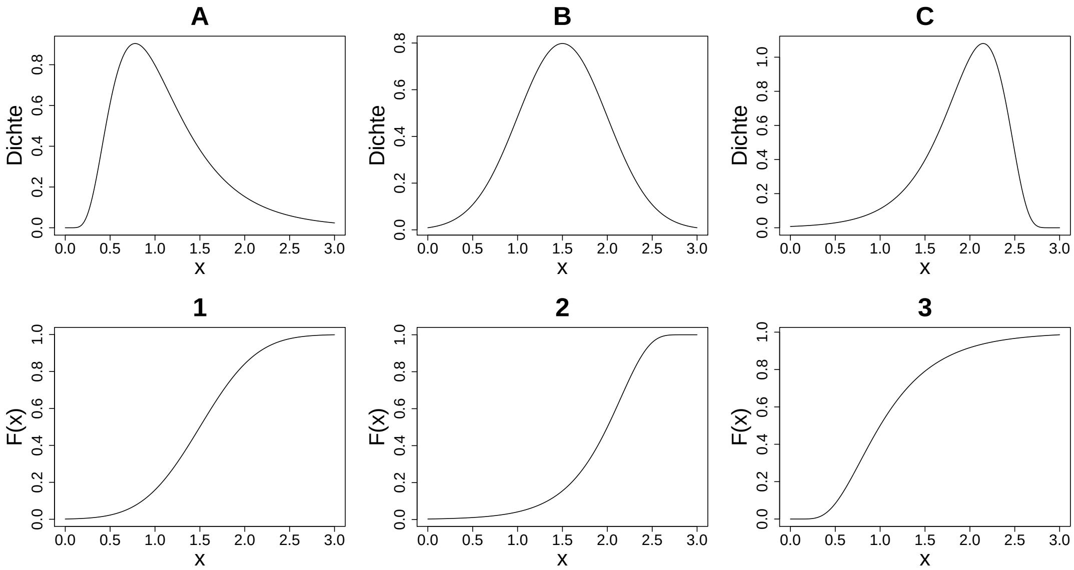
$$F(x) = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{400} = 0.9 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 13.6754,$$

da x im Intervall [0,20] liegen muss.
Hinweis: Beim gesuchten x handelt es sich um das 90%-Quantil von X.

f)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(K \leq 120'000\right) &= \mathbb{P}\left(40'000\sqrt{X} \leq 120'000\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{X} \leq 3\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 9) = F(9) = \frac{9}{10} - \frac{9^2}{400} = 0.6975.\end{aligned}$$

4. Betrachte die folgenden Darstellungen.



Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Die richtige Zuordnung zwischen Dichte und kumulativer Verteilungsfunktion F ist: A3, B1, C2.

b) Für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte aus Abbildung C gilt, dass $P[X = 2] > P[X = 1]$.

c) Für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte aus Abbildung B gilt, dass der Erwartungswert bei 1.5 liegt.

d) Die kumulative Verteilungsfunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.

e) Die Dichtefunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.

Lösung:

a) Richtig.

b) Falsch. Für stetige Verteilungen gilt: $P[X = 2] = P[X = 1] = 0$.

c) Richtig. Die Dichte ist symmetrisch um 1.5.

d) Falsch. Für eine kumulative Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt per Definition: $0 \leq F(x) \leq 1$.

e) Richtig.